Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων – Εσπερινών Επαγγελματικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ) ΕΠΑΛ
Ημερομηνία: Σάββατο 1 Ιουνίου 2024
Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Σχολικού Σελ. 31

Α2. α. Ορισμός συχνότητας v_i Σχολικό Σελ. 65
β. Τύπος Σχολικού Σελ. 87

Α3. α. ΛΑΘΟΣ β. ΛΑΘΟΣ γ. ΣΩΣΤΟ δ. ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Για την συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ έχουμε ότι:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2-3\cdot 2x+5=x^2-6x+5$$

Β2. Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{3}x^3-3x^2+5x+\frac{1}{3}$, $x\in\mathbb{R}$ με πρώτη παράγωγο $f'(x)=x^2-6x+5$ έχουμε:

$$f'(x)=0\Leftrightarrow x^2-6x+5=0$$

$\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 5=36-20=16$ οπότε:

$x_{1,2}=\frac{-\beta\pm\sqrt{\Delta}}{2\alpha}=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 4}{2}$ άρα $x_1=\frac{10}{2}=5$, $x_2=\frac{2}{2}=1$.

x	$-\infty$	1		5	$+\infty$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$
		Τ. Μ.		Τ. Ε.	

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και $[5,+\infty)$. Επίσης η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1,5]$.

Η f παρουσιάζει στο $x=1$ τοπικό μέγιστο το

$$f(1)=\frac{1}{3}-3+5+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}+2=\frac{8}{3}$$

Η f παρουσιάζει στο $x_0=5$ τοπικό ελάχιστο το

$$f(5)=\frac{1}{3}\cdot 125-3\cdot 25+5\cdot 5+\frac{1}{3}=\frac{125}{3}-75+25+\frac{1}{3}=\frac{126}{3}-50=-8$$

Β3. Η εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $A(0,f(0))$ με $f(0)=\frac{1}{3}$ είναι $y=ax+\beta$ με $\alpha=f'(0)=5$ οπότε $y=5x+\beta$ και αφού διέρχεται από το σημείο $A\left(0,\frac{1}{3}\right)$ έχουμε $\frac{1}{3}=5\cdot 0+\beta\Longrightarrow\beta=\frac{1}{3}$.

Επομένως η εξίσωση εφαπτομένης είναι $y=5x+\frac{1}{3}$.

Β4. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h} = f'(-1) = (-1)^2 - 6\cdot(-1) + 5 = 1 + 6 + 5 = 12.$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Εφαρμόζοντας σχήμα Horner στο πολυώνυμο $x^2 + 6x - 7$ με $\rho = 1$ προκύπτει:

1	6	−7	$\rho = 1$
	1	7	
1	7	0	

$x^2 + 6x - 7 = (x-1)(x+7)$.

Άρα $s = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+6x-7}{2x-2} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+7)}{2(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1}\frac{x+7}{2} = \frac{1+7}{2} = 4.$

Επομένως $s = 4$.

Γ2. Είναι $CV = 20\% \Rightarrow \frac{s}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Rightarrow \frac{4}{\bar{x}} = \frac{20}{100} \Rightarrow 20\bar{x} = 400 \Rightarrow \bar{x} = \frac{400}{20} \Rightarrow \bar{x} = 20.$

Γ3. Για τις τιμές $22, 18, 20+\kappa, 14, 16$ ισχύει $\bar{x} = 20$ (1).

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{22+18+20+\kappa+14+16}{5} = \frac{90+\kappa}{5}$ (2)

Από (1) και (2): $\frac{90+\kappa}{5} = 20 \Rightarrow 90 + \kappa = 100 \Rightarrow \kappa = 10.$

Οπότε οι τιμές για $\kappa = 10$ είναι: $22, 18, 30, 14, 16$ και σε αύξουσα σειρά είναι: $14, 16, 18, 22, 30$. Επειδή $\nu = 5$ (περιττός), η διάμεσος θα είναι η μεσαία παρατήρηση (αφού έχουν τοποθετηθεί σε αύξουσα σειρά). Άρα $\delta = 18$.

Γ4. Οι νέες τιμές θα είναι $y_i = x_i + \frac{10}{100}x_i\ ,\ i = 1, 2, \ldots, 5$

$$y_i = \frac{110}{100}x_i\ ,\qquad i = 1, 2, \ldots, 5$$

Η νέα μέση τιμή θα είναι $\bar{y} = \frac{110}{100}\bar{x} = \frac{110}{100}\cdot 20 = 22.$

Η νέα τυπική απόκλιση $s_y = \frac{110}{100}\cdot s = \frac{110}{100}\cdot 4 = \frac{440}{100} = 4{,}4.$

Ο νέος συντελεστής διεύθυνσης θα είναι $CV_y = \frac{s_y}{\bar{y}} = \frac{\frac{110}{100}\cdot 4}{\frac{110}{100}\cdot 20} = \frac{4}{20} = \frac{20}{100} = 20\%.$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζοντας Πυθαγόρειο Θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο AOB, $\hat{O} = 90^o$, όπου πρέπει $x > 0$ και $y > 0$ ως μήκη πλευρών:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 \Rightarrow 10^2 = y^2 + x^2 \Rightarrow y^2 = 100 - x^2 \Rightarrow$$

$y = \sqrt{100 - x^2}$ δηλαδή $f(x) = \sqrt{100 - x^2}$.

Πρέπει $100 - x^2 > 0$.

Λύνω $100 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 100 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 10, \text{ δεκτή} \\ x = -10, \text{ απορρίπτεται} \end{cases}$ γιατί $x > 0$.

ΑΠΟ ΤΟ 1980
2001-ΟΡΟΣΗΜΟ
Φροντίζουμε την επιτυχία

x	$-\infty \quad 0$	10	$+\infty$
$100-x^2$		$+$	$-$

Άρα το πεδίο ορισμού είναι $A=(0,10)$.

Δ2. $f'(x)=\left(\sqrt{100-x^2}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{100-x^2}}(100-x^2)=\frac{1(-2x)}{2\sqrt{100-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{100-x^2}}$

Ο ρυθμός μεταβολής της f ως προς x, όταν $x=8$ είναι

$$f'(8)=\frac{-8}{\sqrt{100-8^2}}=\frac{-8}{\sqrt{100-64}}=\frac{-8}{\sqrt{36}}=\frac{-8}{6}=-\frac{4}{3}$$

Δ3.

$$\lim_{x\to 6}\frac{f(x)-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{\sqrt{100-x^2}-8}{x-6}=\lim_{x\to 6}\frac{(\sqrt{100-x^2}-8)(\sqrt{100-x^2}+8)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim_{x\to 6}\frac{100-x^2-64}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{36-x^2}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(x^2-36)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=\lim_{x\to 6}\frac{-(x-6)(x+6)}{(x-6)(\sqrt{100-x^2}+8)}=$$

$$\lim_{x\to 6}\frac{-(x+6)}{\sqrt{100-x^2}+8}=\frac{-(6+6)}{\sqrt{100-6^2}+8}=-\frac{12}{\sqrt{64}+8}=-\frac{12}{16}=-\frac{3}{4}.$$

Δ4. Για τη συνάρτηση $f(x)=\sqrt{100-x^2}, x\in A=(0,10)$ η πρώτη παράγωγος είναι $f'(x)=-\frac{x}{\sqrt{100-x^2}}<0$ για κάθε $x\in A$.

x	$-\infty \quad 0$	10	$+\infty$
f'		$-$	
f		$\searrow$	

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A=(0,10)$ και είναι $x_1<x_3<x_2$ αφού $x_1=2,3$, $x_2=3,5$, $x_3=2,8$. Άρα $f(x_1)>f(x_3)>f(x_2)$.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Καρρά Θεοδώρα, Λιπορδέζη Μάρθα, Σουλτανίδου Κική

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!

ΑΠΟ ΤΟ 1980
2001 ΟΡΟΣΗΜΟ
φροντίζουμε την επιτυχία