Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων & Εσπερινών Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα: Μαθηματικά Προσανατολισμού
Ημερομηνία: Τρίτη 4 Ιουνίου 2024
Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Σχολικού Σελ. 76

Α2. Ορισμός Σχολικού Σελ. 155

Α3. Θεώρημα Σχολικού Σελ. 216

Α4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Λάθος δ. Λάθος ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. Προσδιορισμός της συνάρτησης $f = \frac{g}{h}$
Πεδίο ορισμού της f:

$$D_f = \{x \mid x \in D_g \cap D_h \; και \; h(x) \neq 0\}$$
$$= \left\{x \;\middle|\; x \in [1, +\infty) \; και \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1\right\} = (1, +\infty)$$

Τύπος της f:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \frac{x+1}{x-1}, x > 1$$

Προσδιορισμός της συνάρτησης $r = g \cdot h$
Πεδίο ορισμού της r:

$$D_r = \{x \mid x \in D_g \; και \; x \in D_h\} = \{x \mid x \geq 1 \; και \; x \geq 1\} = [1, +\infty)$$

Τύπος της r:

$$r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(\sqrt{x} - \tfrac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \tfrac{1}{x}, x \geq 1.$$

Β2. Έστω $x_1, x_2 \in D_f$ με
$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1+1}{x_1-1} = \frac{x_2+1}{x_2-1} \Leftrightarrow (x_1 + 1) \cdot (x_2 - 1) = (x_1 - 1) \cdot (x_2 + 1) \Leftrightarrow$
$x_1 x_2 - x_1 + x_2 - 1 = x_1 x_2 + x_1 - x_2 - 1 \Leftrightarrow -2x_1 = -2x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$
Άρα η f είναι $1-1$, άρα ορίζεται η f^{-1}.
Για την f^{-1}:

$$f(x) = y \Leftrightarrow \frac{x+1}{x-1} = y \Leftrightarrow x + 1 = (x-1) \cdot y \Leftrightarrow x + 1 = xy - y \Leftrightarrow x - yx$$
$$= -y - 1 \Leftrightarrow x(1-y) = -1 - y \overset{1-y \neq 0}{\Longleftrightarrow} x = \frac{-1-y}{1-y}$$

Επίσης $\quad x \in D_f \Rightarrow \frac{-1-y}{1-y} > 1 \Leftrightarrow \frac{-1-y}{1-y} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{-1-y-1+y}{1-y} > 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{1-y} > 0$
$\overset{-2<0}{\Longrightarrow} 1 - y < 0 \Leftrightarrow y > 1.$
Άρα $f^{-1}(x) = \frac{-1-x}{1-x} = \frac{x+1}{x-1}, x > 1.$
$D_f = D_{f^{-1}}$ και $f(x) = f^{-1}(x)$ για κάθε $x > 1$ άρα $f^{-1} = f$.

B3. Για τη συνάρτηση r ισχύει $D_r = [1, +\infty)$.
Η r είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$ άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.
Για πλάγια – οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{r(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-\frac{1}{x}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = 1 = \lambda \in \mathbb{R}.$
$\lim\limits_{x\to+\infty} (r(x) - \lambda x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (r(x) - x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x} - x\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = 0 = \beta \in \mathbb{R}.$
Η $y = x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της C_r στο $+\infty$.

B4. $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2 = 1 + 4r(x) \Leftrightarrow x^2 = 1 + 4\left(x - \frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow x^2 - 1 - 4x - \frac{4}{x} = 0$
$\overset{x\neq0}{\Longrightarrow} x^3 - x - 4x^2 + 4 = 0 \Leftrightarrow x(x^2-1) - 4(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow$
$(x^2-1)(x-4) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 1$ ή $x = 4$.
Όμως $x \in D_f$ και $x \in D_r$ άρα $x = 4$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι συνεχής, άρα συνεχής και στο $x = 2$ οπότε $\lim\limits_{x\to2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to2^-} \left(-2x + 4 + e^\lambda\right) = \lim\limits_{x\to2^+} (-x^2 + 4x - 3 + \lambda) \Leftrightarrow -4 + 4 + e^\lambda = -4 + 8 - 3 + \lambda \Leftrightarrow e^\lambda = \lambda + 1 \;\; (1)$

Γενικά ισχύει $lnx \leq x - 1$ (α) για κάθε $x > 0$.
Τοποθετώντας όπου x το e^x στην (α) προκύπτει $e^x \leq x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
Η ισότητα ισχύει για $x = 0$ άρα μοναδική λύση της (1) η $\lambda = 0$.

Γ2. Για $x \in [0, 2)$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση με $f'(x) = -2$. Για $x > 2$ η f είναι παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική συνάρτηση με $f'(x) = -2x + 4, x > 2$.
Έχουμε για $x > 2 \Leftrightarrow -2x < 4 \Leftrightarrow -2x < -4 \Leftrightarrow -2x + 4 < 0$.

x	0	2	$+\infty$
-2	$-$		
$-2x+4$		$-$	
f'	$-$	$-$	
f			

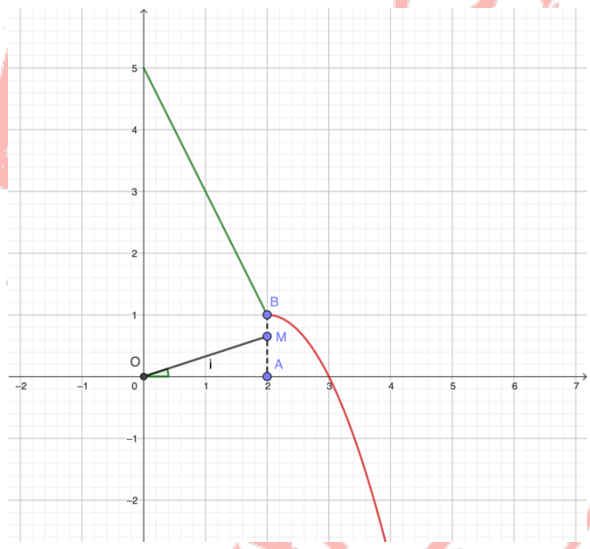
O.M. το $f(0)$

Η f είναι συνεχής στο $[0, +\infty)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, +\infty)$.
Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο $x_o = 0$ το $f(0) = 5$.

Γ3i. Η f είναι συνεχής στο $[0,3]$. Από Γ1 ερώτημα:
για $x \in [0,2)$ $f'(x) = -2$ και για $x > 2$ $f'(x) = -2x + 4$

Ελέγχω αν η f είναι παραγωγίσιμη στο 2 ($f(2) = -4 + 8 - 3 = 1$):
$\lim\limits_{x\to 2^-} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2x+5-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2x+4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^-} \frac{-2(x-2)}{x-2} = -2 = l_1$.
$\lim\limits_{x\to 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-3-1}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} \frac{-x^2+4x-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2^+} -\frac{(x-2)}{x-2} = 0 = l_2$.
Έχουμε ότι $l_1 \neq l_2$ άρα η f δεν είναι παραγωγίσιμη για $x = 2$ οπότε δεν ικανοποιείται το Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[0,3]$.

Γ3ii. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E\big(3, f(3)\big)$ έχει συντελεστή διεύθυνσης $\alpha = \frac{f(3)-f(0)}{0-3}$ όπου $f(3) = -9 + 12 - 3 = 0$ και $f(0) = 5$ άρα $\alpha = -\frac{5}{3}$.
Ελέγχω αν υπάρχει το $\xi \in [0,2)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi) = -\frac{5}{3}$.
Αν $\xi \in [0,2), f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2 = -\frac{5}{3}$ Αδύνατο.
Αν $\xi > 2, f'(\xi) = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -2\xi + 4 = -\frac{5}{3} \Leftrightarrow -6\xi + 12 = -5 \Leftrightarrow -6\xi = -17 \Leftrightarrow$
$\xi = \frac{17}{6} > 0 \; \kappa\alpha\iota \; \frac{17}{6} < \frac{18}{6} = 3$.



Γ4. $\varepsilon\varphi\omega = \frac{AM}{OA}$ ή $\varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$ με $y'(t) = 0{,}5 \Longrightarrow \big(\varepsilon\varphi\omega(t)\big)' = \frac{y'(t)}{2} \Longrightarrow$
$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}\omega'(t) = \frac{y'(t)}{2} \xrightarrow{y'(t)=0{,}5} \omega'(t) = \frac{0{,}5\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)}{2}$.
Τη χρονική στιγμή t_o που το Μ συναντά τη C_f στο $(2,1)$
$\sigma\upsilon\nu\omega = \frac{OA}{OM}$ με $OM^2 = OA^2 + AM^2 = 5$ άρα $OM = \sqrt{5}$ οπότε
άρα $\sigma\upsilon\nu\omega(t_o) = \frac{2}{\sqrt{5}}$
$\omega'(t_o) = \frac{0{,}5\cdot\frac{4}{5}}{2} = \frac{0{,}5\cdot 4}{2\cdot 5} = 0{,}2\, rad/sec$.

ΘΕΜΑ Δ
Δ1. Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $f'(x) = \frac{1-lnx}{x^2}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-lnx)}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - lnx = 0 \Leftrightarrow x = e$.

x	$-\infty \qquad 0$	e	$+\infty$
f'		$+$	$-$
f		$\nearrow$	$\searrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,e]$ και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[e,+\infty)$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $A_1=(0,e]$ ισχύει $f(A_1)=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(e)]$.

Αφού η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $A_2=[e,+\infty)$ ισχύει $f(A_2)=(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x), f(e)]$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx+ax}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{lnx}{x}+a\right)=l_1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{lnx}{x}=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} lnx=-\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=+\infty$ άρα $l_1=-\infty$

$f(e)=\frac{1+ae}{e}=\frac{1}{e}+a.$

Επίσης $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx+ax}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\frac{lnx}{x}+a\right)=l_2$ με

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{lnx}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{x}=0$ άρα $l_2=a$.

Οπότε $f(A_1)=(-\infty,\frac{1}{e}+a]$ και $f(A_2)=(\alpha,\frac{1}{e}+a]$.

$f(D_f)=f(A_1)\cup f(A_2)=\left(-\infty,\frac{1}{e}+a\right]$ άρα από δεδομένα $f\big((0,+\infty)\big)=\left(-\infty,\frac{1}{e}+a\right]$ οπότε $\frac{1}{e}+1=\frac{1}{e}+a\Leftrightarrow a=1.$

Δ2. Για $\alpha=1$, $f(x)=\frac{lnx}{x}+1, x>0.$

$f(1)=1>0$ (A)

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\left(\frac{1}{2}\right)}{\frac{1}{2}}+1=2\ln\left(\frac{1}{2}\right)+1=-2ln2+1<0$ (B)

Από (A) και (B) συνεπάγεται ότι $f(1)f\left(\frac{1}{2}\right)<0$ και συνεχής στο $\left[\frac{1}{2},1\right]$ άρα από θεώρημα Bolzano η $f(x)=0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα x_o με $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και f γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ άρα είναι μοναδική.

Επίσης $0\notin f(A_2)=\left(1,\frac{1}{e}+1\right]$ άρα η $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα $x_o\in\left(\frac{1}{2},1\right)$.

Δ3i. $f(4)=\frac{ln4}{4}+1=\frac{2ln2}{4}+1=\frac{ln2}{2}+1=f(2).$

Η εξίσωση έχει προφανείς ρίζες τις $x_1=2$ και $x_2=4$ όπου $2\in A_1$ με f γνησίως αύξουσα άρα μοναδικό $\big(f(2)\in f(A_1)\big)$ και $4\in A_2$ με f γνησίως φθίνουσα άρα μοναδικό $\big(f(4)\in f(A_2)\big)$.

Δ3ii. $2^x\le x^2\overset{x>0}{\Longrightarrow} ln2^x\le lnx^2\Leftrightarrow xln2\le 2lnx\overset{x>0}{\Longleftrightarrow}\frac{ln2}{2}\le\frac{lnx}{x}\Leftrightarrow f(2)\le f(x)\Leftrightarrow$ $f(x)\ge f(2)$ (1)

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ από (1) συνεπάγεται ότι $x\ge 2$ και $x\in(0,e]$ άρα $x\in[2,e]$.

Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[e,+\infty)$ από (1) συνεπάγεται ότι $f(2)=f(4) \Rightarrow f(x) \geq f(4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} e \leq x \leq 4$ άρα $x \in [2,4]$.

Δ4. (Τρόπος Α)
Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.
(Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)
$E=\int_{-ln2}^{0}|g(x)|dx=-\int_{-ln2}^{lnx_o} g(x)dx+\int_{lnx_o}^{0} g(x)dx=I_1+I_2$
Αφού:
Για $x_o \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ με $f(x_o)=0$ (από Δ2): $\frac{1}{2}<x_o<1 \Rightarrow -ln2<lnx_o<0$.
Για $x \in [-ln2, lnx_o]$: $-ln2<x<lnx_o \Rightarrow \frac{1}{2} \leq e^x \leq x_o$
και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ συνεπάγεται ότι:

$$1-ln4 \leq f(e^x) \leq 0$$

Για $x \in (lnx_o, 0]$: $lnx_o<x<0 \Rightarrow x_o<e^{x_o}<1$ και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,e]$ συνεπάγεται ότι: $0=f(x_o)<f(e^x)<f(1)$.
Άρα $g(x) \leq 0$ για $x \in [-ln2, lnx_o]$ και $g(x) \geq 0$ για $x \in [lnx_o, 0]$.

$$I_1=-\int_{-ln2}^{lnx_o} g(x)dx=-\int_{-ln2}^{lnx_o} f(e^x)\left(\frac{1-x}{e^x}\right)dx$$

Θέτω $f(e^x)=u$ οπότε $f'(e^x)\cdot(e^x)'dx=du \Rightarrow du=\frac{1-x}{(e^x)^2}\cdot e^x dx=\frac{1-x}{e^x}dx$
Για $x=-ln2$: $u_1=f(e^{-ln2})=f\left(\frac{1}{2}\right)=1-ln4$.
Για $x=lnx_o$: $u_2=f(e^{lnx_o})=f(x_o)=0$.

Άρα $I_1=-\int_{1-ln4}^{0} udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_{1-ln4}^{0}=0-\frac{(1-ln4)^2}{2}=-\frac{(1-ln4)^2}{2}$.

$$I_2=\int_{lnx_o}^{0} g(x)dx=\int_{lnx_o}^{0} f(e^x)\left(\frac{1-x}{e^x}\right)dx$$

Θέτω $f(e^x)=u$ οπότε $f'(e^x)\cdot(e^x)'dx=du \Rightarrow du=\frac{1-x}{(e^x)^2}\cdot e^x dx=\frac{1-x}{e^x}dx$
Για $x=lnx_o$: $u_1=f(e^{lnx_o})=f(x_o)=0$.
Για $x=0$: $u_2=f(e^0)=f(1)=1$.

Άρα $I_2=\int_0^1 udu=\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}$

Άρα $E=I_1+I_2=-\frac{(1-ln4)^2}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1-(1-ln4)^2}{2}=\frac{\ln^2 4-2ln4}{2}=\frac{1-4ln2+4ln^2 2}{2}$ τ.μ.

(Τρόπος Β)
Η g είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

(Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

$$E(\Omega)=\int_{-ln2}^{0}|g(x)|dx=\int_{-ln2}^{0}\left|f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}\right|dx$$

Θέτω $u=e^x \Leftrightarrow lnu=x \Rightarrow \frac{1}{u}du=dx$

$x=-ln2 \Rightarrow u=\dfrac{1}{2}$

$x=0 \Rightarrow u=1$

$E(\Omega)=\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-lnu}{u}\right|\frac{1}{u}du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left|f(u)\frac{1-lnu}{u^2}\right|du=\int_{\frac{1}{2}}^{1}|f(u)f'(u)|du$

Για $\frac{1}{2}\leq x\leq x_0 \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} f(x)\leq f(x_0) \Leftrightarrow f(x)\leq 0$

Για $x_0\leq x\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\geq 0$

Για $x\in\left[1,\frac{1}{2}\right]: f'(x)>0$

$E(\Omega)=(-f(u)f'(u)du+\int_{x_0}^{1}f(u)f'(u)du=-\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0}+\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1}=\frac{-f^2(x_0)}{2}+$
$\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}+\frac{f^2(1)}{2}-\frac{f^2(x_0)}{2}=\frac{(-2ln2+1)^2}{2}+\frac{1^2}{2}=\frac{1-4ln2+4ln^2 2}{2}$ τ.μ.

ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

Καρρά Θεοδώρα, Λιπορδέζη Μάρθα, Μπαξεβανίδης Δοξάκης, Σουλτανίδου Κική

Σας ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!