Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Ημερομηνία: Δευτέρα 6 Ιουνίου 2022
Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία απόδειξη ΣΕΛ. 186

Α2. Θεωρία ορισμός ΣΕΛ.142

Α3. Θεωρία ορισμός ΣΕΛ. 161

Α4. α) Σ β) Σ γ) Σ δ) Λ ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$$f:(-\infty,1]\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\ x^4-2x^2+1=(x^2-1)^2$$

$$g:[0,+\infty)\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ g(x)=\ \sqrt{x}$$

Β1. $h(x)=(fog)(x)=f\big(g(x)\big)$, $\pi\rho\acute{\varepsilon}\pi\varepsilon\iota\ x\in Dg\ \kappa\alpha\iota\ g(x)\in Df$

$$\Leftrightarrow\quad x\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ g(x)\leq 1\Leftrightarrow\ x\geq 0\ \ \kappa\alpha\iota\ \sqrt{x}\leq 1\ \ \Leftrightarrow x\geq 0\ \kappa\alpha\iota\ x\leq 1$$

$$\acute{\alpha}\rho\alpha\ 0\leq x\leq 1\ \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ Dh=[0,1]$$

$\mu\varepsilon\ h(x)=f\big(g(x)\big)=(\sqrt{x}^{\,2}-1)^2=(x-1)^2$

Β2. $h(x)=(x-1)^2, x\in[0,1]$

<u>Α' τρόπος</u>:

h συνεχής και παραγωγίσιμη στο [0, 1] ως πολυωνυμική με

$h'(x)=2(x-1)(x-1)'=2(x-1)<0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο [0, 1] οπότε h: 1-1.

<u>Β′ τρόπος:</u>

Για κάθε $x_1,x_2\in[0,1]$ με $x_1<x_2\leq 1\ \Rightarrow x_1-1<x_2-1\leq 0\Rightarrow$

$(x_1-1)^2>(x_2-1)^2\Rightarrow h(x_1)>h(x_2)$ άρα h γνησίως φθίνουσα στο [0, 1] οπότε h: 1-1.

<u>Σύνολο τιμών της h:</u>

Για $x\in\Delta=[0,1]$ και h γνησίως φθίνουσα άρα σύνολο τιμών $h(\Delta)=[h(1),\ h(0)]$ με $h(1)=(1-1)^2=0, h(0)=(0-1)^2=1$.

$h(\Delta)=[0,1]$ άρα πεδίο ορισμού της h^{-1}: $D_{h^{-1}}=[0,1]$.

Εύρεση h^{-1}:

Για $h(x) = y,\ y \in h(\Delta) = [0,1] \Longrightarrow (x-1)^2 = y,\ y \in [0,1] \Longrightarrow |x-1| = \sqrt{y} \Longrightarrow -x+1 = \sqrt{y} \Longrightarrow x = 1-\sqrt{y}$ άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x},\ x \in [0,1]$.

Β3. $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, x \in [0,1]$

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{h^{-1}(x)}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases} \quad \text{ή} \quad \varphi(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x}, x \in [0,1) \\ \frac{1}{2}, x = 1 \end{cases}$$

i. Για $x \in [0,1)$ η φ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών
Για $x_0 = 1 : \varphi(1) = \frac{1}{2}$
$\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-\sqrt{x}}{1-x} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{(1-\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}{(1-x)(1+\sqrt{x})} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1}{1+\sqrt{x}} = \frac{1}{2}$ δηλαδή $\lim\limits_{x\to 1} \varphi(x) = \varphi(1)$ άρα φ συνεχής στο $x_0 = 1$.
Συνεπώς φ συνεχής στο $[0,1]$, και $\varphi(0) = 1 \neq \varphi(1) = \frac{1}{2}$ άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών για την φ στο $[0,1]$.

ii. Αφού $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ άρα $\frac{1}{2} < \eta\mu\alpha < 1 \Rightarrow \varphi(0) < \eta\mu\alpha < \varphi(1)$
Παρατηρούμε ότι το $\eta\mu\alpha$ είναι μεταξύ των $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Από (i) σύμφωνα με το Θεώρημα Ενδιαμέσων τιμών υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $\varphi(x_0) = \eta\mu\alpha$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ συνεχής, η } Cf \text{ διέρχεται από την αρχή των αξόνων, άρα } f(0) = 0$$

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$$

$$f'(x) = \begin{cases} -2, & x < -1 \\ 3x^2 - 1, & x > -1 \end{cases}$$

Για $x < -1$ είναι $f'(x) = -2 \Rightarrow f'(x) = (-2x)'$ άρα υπάρχει σταθερά $c_1 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f'(x) = -2x + c_1$$

Για $x > -1$ είναι $f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(x) = (x^3 - x)'$ άρα υπάρχει σταθερά $c_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$f(x) = x^3 - x + c_2$$
$$\text{και } f(0) = 0 \Rightarrow 0 + c_2 = 0 \Rightarrow c_2 = 0$$
$$\text{άρα } f(x) = x^3 - x \text{ για } x > -1$$

Επειδή f συνεχής, άρα f συνεχής στο -1 οπότε

$$f(-1) = \lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$$
$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} (-2x + c_1) = 2 + c_1 \quad \Longrightarrow$$
$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} (x^3 - x) = -1 + 1 = 0$$

$2 + c_1 = 0 \Longrightarrow c_1 = -2$

οπότε και $f(-1) = 0$.

Συνεπώς $f(x) = \begin{cases} -2x-2, & x \le -1 \\ x^3 - x, & x > -1 \end{cases}$

Γ2. Για $x > -1$: $f'(x) = 3x^2 - 1$

Η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ είναι $\begin{cases} \varepsilon: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \\ f(x_0) = x_0^3 - x_0,\ f'(x_0) = 3x_0^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow$

$y - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(x - x_0)$ και τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $(0, 2)$.

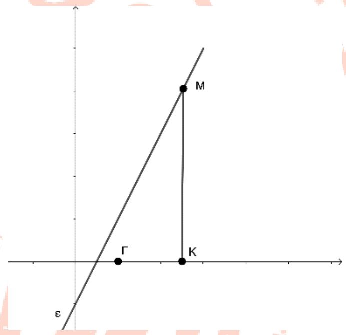
Άρα $-2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(0 - x_0) \Rightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = -3x_0^3 + x_0 \Rightarrow 2x_0^3 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1.$

Οπότε η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $A(1, f(1))$ με $f(1) = 1^3 - 1 = 0,\ f'(1) = 3 \cdot 1^2 - 1 = 2$ είναι

$y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y - 0 = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2.$

Γ3. $y = 2x - 2$

$M(x, y)\ \mu\varepsilon\ y = 2x - 2, x > 2$



K: προβολή του Μ στον x'x άρα $K(x, 0)$.

$E = (KM\Gamma) = \frac{1}{2}(KM)(K\Gamma)$

$(KM) = \sqrt{(x_M - x_\kappa)^2 + (y_M - y_\kappa)^2} = \sqrt{0 + y_M^2} = |y_M| = |2x - 2| = 2x - 2,$

$\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ x > 2, \acute{\alpha}\rho\alpha\ 2x - 2 > 0$

Επομένως $E(x) = \frac{1}{2}(2x-2)(x-2) = \frac{1}{2}2(x-1)(x-2) \Rightarrow E(x) = x^2 - 3x + 2, x > 2 \Rightarrow E(t) = x^2(t) - 3x(t) + 2 \Rightarrow$
$E'(t) = 2x(t) \cdot x'(t) - 3x'(t)$

Τη χρονική στιγμή t_0: $x(t_0) = 3,\quad x'(t_0) = 2$ οπότε ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού είναι

$E'(t_0) = 2 \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 2 = 6\tau\mu\ \alpha\nu\acute{\alpha}\ \delta\varepsilon\upsilon\tau\varepsilon\rho\acute{o}\lambda\varepsilon\pi\tau o.$

Γ4. $\lim\limits_{x \to -\infty} \left[\frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} + \frac{f(-x)}{1 - x^3}\right] = l$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)}$ θέτω $u = f(x)$, $u_0 = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (-2x - 2) = +\infty$

οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\eta\mu u}{u}$

είναι $-1 \le \eta\mu u \le 1 \overset{u>0}{\Longrightarrow} -\frac{1}{u} \le \frac{\eta\mu u}{u} \le \frac{1}{u}\ \kappa\alpha\iota\ \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{u} = 0 = \lim\limits_{u \to +\infty} (-\frac{1}{u}).$

Συνεπώς με κριτήριο παρεμβολής θα είναι: $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\eta\mu u}{u} = 0\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{\eta\mu f(x)}{f(x)} = 0.$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3}$ θέτω $\begin{cases} u = -x \\ x = -u \end{cases}$, $u_0 = \lim\limits_{x \to -\infty} (-x) = +\infty$

Οπότε $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(-x)}{1 - x^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{1 - (-u)^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{f(u)}{1 + u^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u^3 - u}{1 + u^3} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{u^3}{u^3} = 1.$

Άρα το ζητούμενο όριο είναι $l = 0 + 1 = 1$.

ΘΕΜΑ Δ

$f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x - \ln(3x)$

Δ1. f συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις με $f'(x) = 1 - \frac{1}{3x}(3x)' = 1 - \frac{1}{3x} \cdot 3 = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$

i. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} > 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} x > 1$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x} < 0 \overset{x>0}{\Longleftrightarrow} 0 < x < 1$

	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
f'		$-$ 0	$+$
f		↘	↗

$f(1) = 1 - ln3$

f γνησίως φθίνουσα στο $\Delta_1 = (0,1]$ άρα το σύνολο τιμών είναι $f(\Delta_1) = [f(1), \lim_{x\to 0} f(x))$

$f(1) = 1 - ln3, \quad \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}(x - \ln(3x)) = +\infty$

Αφού $\lim_{x\to 0} \ln(3x) = -\infty$ άρα $f(\Delta_1) = [1 - ln3, +\infty)$

f γνησίως αύξουσα στο $\Delta_2 = [1, +\infty)$ άρα σύνολο τιμών $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x\to+\infty} f(x))$

(αφού f συνεχής)

Με $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}(x - \ln(3x)) = \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right)\right]$ και για το $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} \overset{DLH}{\Longrightarrow} \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(3x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln(3x))'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{3x}\cdot 3}{1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$.

Και $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln(3x)}{x}\right) = 1 - 0 = 1$, άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ οπότε $f(\Delta_2) = [1 - ln3, +\infty)$

$1 - ln3 < 0$

Η τιμή $0 \in f(\Delta_1)$ και f ↘ στο Δ_1 άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα.

$x_1 < 1$

Η τιμή $0 \in f(\Delta_2)$ και f ↗ στο Δ_1 άρα η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα.

$x_2 > 1$

ii. f' παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ ως ρητή με $f''(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$, οπότε f κυρτή.

Δ2. Η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδικές ρίζες $x_1<1<x_2$ (από Δ1i) άρα το ζητούμενο εμβαδό είναι $E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx$. Για $x\in(x_1,x_2)$ η $f(x)\neq 0$ και f συνεχής και $f(1)<0$ άρα $f(x)<0$ για $x\in(x_1,x_2)$.

Οπότε $E=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx=-\int_{x_1}^{x_2}(x-ln3x)dx=\int_{x_1}^{x_2}(ln3x-x)dx=\int_{x_1}^{x_2}ln3xdx-\int_{x_1}^{x_2}xdx=\int_{x_1}^{x_2}(x)'ln3xdx-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}=[xln3x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x(ln3x)'dx-\left[\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}\right]=x_2ln3x_2-x_1ln3x_1-\int_{x_1}^{x_2}x\frac{1}{3x}3dx-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}=x_2ln3x_2-x_1ln3x_1-\int_{x_1}^{x_2}1dx-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}=x_2ln3x_2-x_1ln3x_1-(x_2-x_1)-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}=x_2ln3x_2-x_1ln3x_1-x_2+x_1-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}$ (1)

Είναι $f(x_1)=0\Rightarrow x_1-ln3x_1=0\Rightarrow ln3x_1=x_1$ και $f(x_2)=0\Rightarrow x_2-ln3x_2=0\Rightarrow ln3x_2=x_2$.

Οπότε η (1) $\Rightarrow E=x_2^2-x_1^2-x_1+x_2-\frac{x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1)-(x_2-x_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$

Δ3. Είναι $0<x_1<1\Rightarrow 0>-x_1>-1\Rightarrow 2>2-x_1>1\ \Rightarrow 1<2-x_1<2$ δηλαδή $(2-x_1)\in(1,+\infty)$.

<u>Α' τρόπος:</u>

Έστω $f(2-x_1)\geq 0$ τότε $f(2-x_1)\geq f(x_2)$ αφού $f(x_2)=0$ και $x_2,\ 2-x_1\in(1,+\infty)$ όπου f γνησίως αύξουσα άρα $2-x_1\geq x_2\Rightarrow x_2+x_1-2\leq 0$ άρα $E\leq 0$ (από Δ2) άτοπο. Συνεπώς $f(2-x_1)<0$.

<u>Β' τρόπος:</u>

Είναι από Δ2, $E=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0$ αφού η f μηδενίζεται μόνο για x_1,x_2 και $x_2-x_1>0$ (αφού $x_1<x_2$).

Άρα $x_1+x_2-2>0\Rightarrow x_2>2-x_1$ και f γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ αφού $x_2,\ 2-x_1\in(1,+\infty)\Rightarrow f(x_2)>f(2-x_1)$ *και* $f(x_2)=0$ (από Δ1i)$\Rightarrow f(2-x_1)<0$.

Δ4. Εξίσωση $2f(x)+ln3=1+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow$

$f(x)=1-ln3-f(x)+f'(x_2)(x-x_2)$ και $f(1)=1-ln3\Leftrightarrow$

$f(x)=f(1)-f(x)+f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow f(x)-f'(x_2)(x-x_2)=f(1)-f(x)$ (2)

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x=1$ (από Δ1i) οπότε ισχύει $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x>0$ και η ισότητα ισχύει μόνο για $x=1\Rightarrow f(1)-f(x)\leq 0$ για κάθε

$x>0$ και $x=1$ ισχύει η ισότητα. (3)

Εξίσωση εφαπτομένης C_f στο $\left(x_2,f(x_2)\right)$: $y-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)$ και

$f(x_2)=0$ (από Δ1i) άρα $y=f'(x_2)(x-x_2)$ και f κυρτή (από Δ1) άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη άρα $f(x)\geq f'(x_2)(x-x_2)$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=x_2$ (στο σημείο επαφής) (4)

Από (2), (3), (4) η εξίσωση είναι αδύνατη.

Επιμέλεια: Αραμπατζής Φίλιππος , Ιατρίδης Κοσμάς, Καρρά Θεοδώρα, Λιπορδέζη Μάρθα, Σουλτανίδου Κική

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!