ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ
Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ
ΤΡΙΤΗ 26 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2022 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Έστω συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν η f είναι συνεχής στο Δ και ισχύει $f'(x)=0$, για κάθε x εσωτερικό του Δ, τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το Δ.

Μονάδες 7

Α2 Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathrm{A}\to\mathbb{R}$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο σε κάποιο $x_0\in\mathrm{A}$;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

i. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

ii. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε η f' είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)>0$, τότε η εξίσωση $f(x)=0$ δεν έχει ρίζα στο (α,β) .

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι ορισμένη και παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και δεν είναι 1-1, τότε υπάρχει $x_0\in\Delta$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f έχει οριζόντια εφαπτόμενη.

v. Για κάθε συνάρτηση f που είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f , τον άξονα xx' και τις ευθείες $x=\alpha, x=\beta$ είναι $\mathrm{E}(\Omega)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$.

Μονάδες 10

Α4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

<< Κάθε συνάρτηση f, η οποία είναι συνεχής σε κάποιο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και παραγωγίσιμη στο σημείο x_0.>>

i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

ii. Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε , ενώ αν είναι ψευδής, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β.

Δίνονται οι συναρτήσεις f, g, με $f(x)=e^{-x}+\alpha, x\in\mathbb{R}$, όπου α παράμετρος, και $g(x)=\ln x, x>0$.

Αν η ευθεία $(\varepsilon_1): y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

Μονάδες 2

Β2. Να ορίσετε τη συνάρτηση $h(x)=(f\circ g)(x)$.

Μονάδες 5

Β3. Να αποδείξετε ότι η $h(x)$ αντιστρέφεται και να δείξετε ότι $h^{-1}(x)=\dfrac{1}{x-1}, x>1$.

Μονάδες 4

Β4.

i. Να βρείτε την κατακόρυφη ασύμπτωτη (ε_2) της γραφικής παράστασης της h^{-1} .

ii. Αν Α το κοινό σημείο των $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ και Ο η αρχή των αξόνων, να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης (ζ) της γραφικής παράστασης της g που είναι παράλληλη στην ευθεία ΟΑ.

Μονάδες 3+5

Β5. Αν $(\zeta): y=x-1$ η εφαπτόμενη του **Β4(ii)** ερωτήματος, να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει την ευθεία (ζ) σε ένα μόνο σημείο με τετμημένη $x_0\in(2,3)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x-h)}{h}=6x^2$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Δίνεται επίσης ότι $f(0)=0$.

Γ1. Να δείξετε ότι $f(x)=x^3, x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 4

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εφαπτόμενη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\mathrm{A}(1, f(1))$ εφάπτεται και την γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x)=2x^2+7x$.

Μονάδες 4

Γ3. Να υπολογίσετε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και την ευθεία (ε).

Μονάδες 6

Γ4. Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να ορίσετε την f^{-1} .

Μονάδες 6

Γ5. Ένα σημείο $\mathrm{M}(x, y)$ κινείται στην γραφική παράσταση της f. Αν Ο η αρχή των αξόνων και Α η προβολή του σημείου Μ στον άξονα xx' και η τετμημένη του Μ αυξάνεται με ρυθμό 2 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου AOM, τη χρονική στιγμή που το Μ διέρχεται από το $\mathrm{A}(1, f(1))$.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\ln\left(e^{x}+e^{-x}\right), x \in \mathbb{R}$ και $g(x)=\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}, x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να δείξετε ότι η συνάρτηση f είναι παράγουσα της g και στη συνέχεια να υπολογίσετε το $\mathrm{I}_1=\int_0^1 \left(2 f(x) g(x)\right) dx$.

Μονάδες 4

Δ2.

i. Να δείξετε ότι $f\left(3^{x}\right)+f\left(5^{x}\right) \geq f\left(4^{x}\right)+f\left(6^{x}\right)$, για κάθε $x \leq 0$.

ii. Να λυθεί η εξίσωση $f(x)+f(2x)=\ln 4$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Μονάδες 6

Δ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f η οποία να εφάπτεται στην γραφική παράσταση της g και να την διαπερνά στο σημείο επαφής της.

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε τις τιμές της παραμέτρου $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες η ευθεία $y=\alpha$ τέμνει την γραφική παράσταση της f σε δύο ακριβώς σημεία με τετμημένες x_1, x_2, για τις οποίες ισχύει $x_1+x_2=0$.

Μονάδες 5

Δ5. Να υπολογίσετε το $\mathrm{I}_2=\int_{-2}^{2}\left(f(x) \cdot g^{3}(x)\right) dx$.

Μονάδες 4

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.

2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων , αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.

4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ