



ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 3 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2022 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α.

A1. Να αποδείξετε ότι η αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι και συνεχής σ' αυτό.

Μονάδες 7

A2. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$;

Μονάδες 4

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

- Έστω f μια 1-1 συνάρτηση. Τότε οι εξισώσεις $f(x) = f^{-1}(x)$ και $f(x) = x$ είναι ισοδύναμες.
- Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο Δ και μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f \circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ , με $((f \circ g)(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$.
- Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x) \geq 3, x \in \mathbb{R}$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το 3.
- Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{f(x)} = 0$.
- Κάθε ευθεία που εφάπτεται στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει ακριβώς 1 κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Μονάδες 10

A4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

<<Έστω $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση. Αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi) = 0$, τότε $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$.>>

- Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

- Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 3



ΑΡΧΗ 2ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \alpha x - \frac{1}{x}, & x > 0 \\ \beta x^3 + x, & x \leq 0 \end{cases}$, όπου α, β σταθεροί πραγματικοί αριθμοί.

Αν γνωρίζετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^3 - 1} = 1$ και η εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(1, f(1))$ είναι παράλληλη στην ευθεία $(\varepsilon): y - 2x = 2022$:

B1. Να αποδείξετε ότι $\alpha = 1, \beta = 1$.

Μονάδες 4

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη συνέχεια.

Μονάδες 3

B3.

- Να μελετήσετε τη συνάρτηση $f(x)$ ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το σύνολο τιμών της.
- Είναι η $f(x)$ 1-1; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 6+2

B4. Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $e^{f(x)} = \mu$ για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου $\mu \in (0, 1]$.

Μονάδες 4

B5. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της $f(x)$ τέμνει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \eta\mu x$ σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη $x_0 \in (1, \pi)$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f^3(x) + f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

G1. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $A(-2, f(-2))$.

Μονάδες 4

G2. Να αποδείξετε ότι η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} και να υπολογίσετε την $f''(x)$ συναρτήσει της $f(x)$.

Μονάδες 4

G3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η συνάρτηση $K(x) = \begin{cases} f(x), & x \leq -2 \\ \alpha x^2 + \beta x, & x > -2 \end{cases}$ να είναι παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} .

Μονάδες 6

G4. Να δείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_f οι οποίες να είναι κάθετες στην ευθεία $(\zeta): y = -4x$ και να βρείτε τις εξισώσεις τους.

Μονάδες 6



ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

Γ5. Αν $\alpha = -\frac{1}{2}, \beta = -1$, σημείο $M(x, y)$ κινείται στην γραφική παράσταση της C_K , για $x > -2$.

Αν η τετμημένη του M μειώνεται με ρυθμό 2 cm/sec, να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της τεταγμένης του M , τη χρονική στιγμή που το M διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η παραγωγίσιμη και γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με συνεχή πρώτη παράγωγο, για την οποία ισχύει ότι:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x}{x} = -3$
- $f^2(1) + 8f(1) + 7 < 0$

Δ1. Να δείξετε ότι $f(0) = 0$ και $f'(0) = -2$.

Μονάδες 4

Δ2. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο $A(\xi, g(\xi))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = (x-1) \cdot f(x), x \in \mathbb{R}$ δέχεται οριζόντια εφαπτόμενη.

Μονάδες 5

Δ3. Αν επιπλέον ισχύει ότι $(f \circ f)(x) + e^{-x} - x = f(e^{-x} - x - 1) + f(x) + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να δείξετε ότι $f(x) = e^{-x} - x - 1, x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ4. Σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $x_0 \geq 0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y = f(x)$ με $x \geq x_0$. Αν υποθέσουμε ότι $x'(t) > 0$, για κάθε $t \geq 0$:

- Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο της καμπύλης στο οποίο ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του M .
- Αν N είναι η προβολή του M στον άξονα xx' και O η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου OMN τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία $x(t_1) = 2$ μον. και $x'(t_1) = 1$ μον./sec.

Μονάδες 7

Δ5. Αν η συνάρτηση f^{-1} είναι συνεχής στο $x_0 = \ln 2 + 1$, να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο με τετμημένη $x_0 = \ln 2 + 1$.

Μονάδες 4

ΑΡΧΗ 4ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ Δ΄ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων , αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **12.00** π.μ.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**

