

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ
Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΤΕΤΑΡΤΗ 5 ΜΑΙΟΥ 2021 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**



ΘΕΜΑ Α.

A1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο x_0 , τότε να αποδείξετε ότι και η συνάρτηση $f + g$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και ισχύει $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$

Μονάδες 5

A2.

- i. Έστω μια συνάρτηση f , συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Πότε λέμε ότι η f είναι κοίλη στο Δ ;
- ii. Πότε λέμε ότι η ευθεία $y = \lambda x + \beta$ ονομάζεται ασύμπτωτη της C_f στο $+\infty$;

Μονάδες 6

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

- i. Η εικόνα $f(\Delta)$ ενός διαστήματος Δ μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης f είναι διάστημα.
- ii. Αν μια συνάρτηση f , ορισμένη σε ένα σύνολο A είναι συνεχής στο A και $f'(x) = 0$, για κάθε εσωτερικό σημείο x του A , τότε η f είναι σταθερή σε όλο το A .
- iii. Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και ισχύει $f(\alpha) \cdot f(\beta) > 0$, τότε η εξίσωση $f(x) = 0$ αποκλείεται να έχει ρίζα στο (α, β) .
- iv. Αν για τρεις συναρτήσεις f, g και h ορίζονται οι $(f \circ g) \circ h$ και $f \circ (g \circ h)$, τότε ισχύει ότι $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$.
- v. Το σημείο καμπής μιας συνάρτησης είναι και κρίσιμο σημείο αυτής.

Μονάδες 10

A4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

<< Έστω συνάρτηση f , η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα σε όλο το διάστημα Δ , τότε υποχρεωτικά ισχύει ότι $f'(x) < 0$ σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .>>

- i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα A , αν είναι αληθής, ή το γράμμα Ψ , αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

- ii. Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε, ενώ αν είναι ψευδής, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 3



ΘΕΜΑ Β.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + 1 + \frac{1}{x}$.

B1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα της.

Μονάδες 5

B2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

B3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της f .

Μονάδες 4

B4. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

Μονάδες 5

B5. Να χαράξετε την γραφική παράσταση της f .

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Δίνεται η συνάρτηση $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = \begin{cases} x \cdot \ln x + x, & x > 0 \\ \ell, & x = 0 \end{cases}$ όπου

$$\ell = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}.$$

Γ1. Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$.

Μονάδες 6

Γ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και να αποδείξετε ότι $\ln x \geq -1 - \frac{1}{e^2 x}$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό μ για τον οποίον ισχύει $f(x) + \mu \geq \mu x + 1$, για κάθε $x > 0$.

Μονάδες 6

Γ4. Υλικό σημείο $M(x, f(x))$ ξεκινά από την αρχή των αξόνων $O(0,0)$ και κινείται πάνω στην γραφική παράσταση της f , με την τετμημένη του να αυξάνεται με σταθερό ρυθμό. Τη χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία το σώμα διέρχεται από το σημείο $N(e, f(e))$, η τεταγμένη αυξάνεται με ρυθμό 3 cm/sec . Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής της τετμημένης του M .

Μονάδες 6



ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = 0 \text{ και } f'(x) = \frac{1}{1 + e^{f(x)}}, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Δ1. Να δείξετε ότι $f'(0) = \frac{1}{2}$.

Μονάδες 2

Δ2. Να δείξετε ότι $e^{f(x)} + f(x) = x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφη της.

Μονάδες 6

Δ3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f .

Μονάδες 4

Δ4.

i. Να βρείτε την εφαπτόμενη της C_f στο σημείο $A(e, f(e))$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $(e+1)f(f^{-1}(x_0) - 2) + 1 \geq f^{-1}(x_0)$.

Μονάδες 8

Δ5. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x+1) - f(x))$.

Μονάδες 5



ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο **εξώφυλλο** να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο **εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.** Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποστολής απαντήσεων: 14.30.

**ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ.
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ**