ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΚΑΙ Δ' ΤΑΞΗΣ ΕΣΠΕΡΙΝΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 9 ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2021 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΡΕΙΣ (3)

ΘΕΜΑ Α.

Α1. Να αποδείξετε ότι η αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της ,τότε είναι και συνεχής σ' αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Πότε μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$;

Μονάδες 4

Α3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με Σωστό(Σ) ή Λάθος(Λ).

i. Έστω f μια 1-1 συνάρτηση. Τότε οι εξισώσεις $f(x)=f^{-1}(x)$ και $f(x)=x$ είναι ισοδύναμες.

ii. Αν μια συνάρτηση g είναι παραγωγίσιμη στο Δ και μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $g(\Delta)$, τότε η συνάρτηση $f\circ g$ είναι παραγωγίσιμη στο Δ , με $((f\circ g)(x))'=f'(g(x))\cdot g'(x)$.

iii. Αν για τη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ισχύει ότι $f(x)\geq 3, x\in\mathbb{R}$, τότε η f έχει ελάχιστη τιμή το 3.

iv. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=0$.

v. Κάθε ευθεία που εφάπτεται στην γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει ακριβώς 1 κοινό σημείο με την γραφική παράσταση της συνάρτησης.

Μονάδες 10

Α4. Θεωρείστε τον ισχυρισμό:

<<Έστω $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ μια συνεχής συνάρτηση . Αν υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f(\xi)=0$, τότε $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.>>

i. Να χαρακτηρίσετε τον παραπάνω ισχυρισμό, γράφοντας στο τετράδιο σας το γράμμα Α, αν είναι αληθής , ή το γράμμα Ψ, αν είναι ψευδής.

Μονάδες 1

ii. Αν η πρόταση είναι αληθής να την αποδείξετε , ενώ αν είναι ψευδής, να δώσετε ένα αντιπαράδειγμα.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Β.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f:\mathrm{A}=(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ και $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με τύπους $f(x)=\dfrac{\ln x+\alpha}{\ln x}$ και $g(x)=e^{x-1}$,όπου α πραγματικός σταθερός αριθμός.

Αν γνωρίζετε ότι η αντίστροφη της f έχει τύπο , $f^{-1}(x)=e^{\frac{1}{x-1}}, x\in f(\mathrm{A})$, τότε:

Β1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και στη συνέχεια ότι η $f(x)$ μπορεί να γραφτεί στη μορφή $f(x)=1+\dfrac{1}{\ln x}$.

Μονάδες 5

Β2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f .

Μονάδες 6

Β3. Να ορίσετε τη συνάρτηση $\varphi=f\circ g$.

Μονάδες 8

Β4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\dfrac{\varphi^{-1}(x)}{x-2}+\dfrac{g'(x)}{x-3}=3$ έχει μια τουλάχιστον λύση x_0, με $x_0>1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ.

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\eta\mu^2 x-x^4\le x\cdot f(x)\le \eta\mu^2 x+x^4$, για κάθε $x<\pi$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(0)=0$.

Μονάδες 3

Γ2. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x=0$ και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτόμενης της C_f στο σημείο $\mathrm{A}(0,f(0))$.

Μονάδες 5

Δίνεται επιπλέον ότι $f(x)=\begin{cases}\eta\mu x, x<\pi\\ \alpha x+\beta, x\ge\pi\end{cases}$.

Γ3. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε η f να είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=\pi$.

Μονάδες 7

Γ4. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f'(x)=x^2$ έχει μοναδική λύση στο $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Μονάδες 6

Γ5. Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=f^2(x)-f(x^2), x>\pi$. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν ακριβώς δύο εφαπτόμενες της C_g, οι οποίες διέρχονται από το σημείο $K(1,0)$.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ.

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\ln x+1$.

Δ1.Να δείξετε ότι η παράγωγος της f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης της f',δηλαδή της $(f')^{-1}$.

Μονάδες 5

Δ2.Να λύσετε την ανίσωση $(f')^{-1}\left(\dfrac{2\ln x^x-1}{2x}+1\right)<1$.

Μονάδες 5

Δ3.Σημείο Μ ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $\mathrm{A}\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, με $x_0 \geq 1$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x)$ με $x \geq x_0$,. Αν υποθέσουμε ότι $x'(t)>0$, για κάθε $t \geq 0$:

i. Να βρείτε σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης του Μ είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του Μ.
ii. Αν Ν είναι η προβολή του Μ στον άξονα xx' και Ο η αρχή των αξόνων, να υπολογίστε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού του τριγώνου ΟΜΝ τη χρονική στιγμή t_1 κατά την οποία $x(t_1)=2$ μον. και $x'(t_1)=1$ μον./sec.

Μονάδες 9

Δ4. Αν η συνάρτηση $(f')^{-1}$ είναι συνεχής στο $x_0=\dfrac{1}{2}$, να βρείτε την εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της $(f')^{-1}$ στο σημείο με τετμημένη $x_0=\dfrac{1}{2}$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά σας στοιχεία. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μη γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων , αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας, να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα μόνο με μπλε ή μόνο με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει.
4. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 12.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ
ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ