

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΛ

16.06.2021

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ 2001 ΟΡΟΣΗΜΟ

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό Βιβλίο σελ.135

A2. Σχολικό Βιβλίο σελ. 51

A3. Σχολικό Βιβλίο σελ. 23

A4. α) Σ

β) Λ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$f(x+1) = (x+1)e^{-x}$$

$$\text{Θέτω } y = x+1 \Rightarrow x = y-1, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{τότε } f(y) = ye^{-(y-1)} \Rightarrow f(y) = ye^{-y+1}, y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Άρα, } f(x) = xe^{-x+1}, x \in \mathbb{R}$$

B2.

Η f συνεχής στο \mathbb{R} ως πράξεις συνεχών και f παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = e^{-x+1} - xe^{-x+1} = e^{-x+1}(1-x)$$

$$\text{Λύνω } f'(x) = 0 \Rightarrow e^{-x+1}(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } e^{-x+1} = 0 \text{ αδύνατο}$$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		+	0	-	
e^{-x+1}		+		+	
f'		+	0	-	
f		↗		↘	

Ο. Μ.

Η f παρουσιάζει ολικό μέγιστο για $x = 1$ το $f(1) = 1 \cdot e^0 = 1$

B3.

Η f συνεχής στο \mathbb{R} και η f' παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $f''(x) = -e^{-x+1} - (1-x)e^{-x+1} = -e^{-x+1}(1+1-x) = -e^{-x+1}(2-x) = e^{-x+1}(x-2)$.

Λύνω $f''(x) = 0 \Rightarrow e^{-x+1}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	\emptyset	$+$
e^{-x+1}	$+$	$+$	$+$
f''	$-$	\emptyset	$+$
f	\cup	\cup	\cup

Σ. Κ.

Η f παραγωγίσιμη στο $x = 2$, άρα $(2, f(2))$ σημείο καμπής.

Ασύμπτωτες

Κατακόρυφες: f συνεχής στο \mathbb{R} άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

Οριζόντιες- Πλάγιες:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^{-x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} = 0.$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x+1} \stackrel{0(+\infty)}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x-1}} \stackrel{\infty|\infty}{\Leftrightarrow} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{x-1}} = 0.$

Άρα $y = 0$ οριζόντια στο $+\infty$.

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^{-x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} = +\infty.$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x+1} = -\infty$

Άρα η f δεν έχει ασύμπτωτες στο $-\infty$.

B4. i)

Στο $A_1 = (-\infty, 1]$, f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$$f(A_1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(1) \right] = (-\infty, 1].$$

Στο $A_2 = (1, +\infty)$, f συνεχής και γνησίως φθίνουσα άρα

$$f(A_2) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \right) = (0, 1).$$

ii) Αν $\lambda \in (-\infty, 0]$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 1 ρίζα.

Αν $\lambda \in (0, 1)$ η εξίσωση $f(x) = \lambda$ έχει 2 ρίζες.

Αν $\lambda = 1$ η εξίσωση έχει μοναδική ρίζα.

Αν $\lambda \in (1, +\infty)$ η εξίσωση δεν έχει καμία ρίζα.

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x) = \begin{cases} ax^3 - 3x^2 - x + 1, & x \leq 0 \\ \sigma\upsilon\nu x, & 0 < x \leq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

Γ1. $f(0) = a \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 - 0 + 1 = 1.$

- $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} ax^3 - 3x^2 - x + 1 = 1.$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sigma\upsilon\nu x = \sigma\upsilon\nu 0 = 1.$

Άρα $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \Rightarrow f$ συνεχής στο $x = 0.$

- Αν $x < 0$, f συνεχής ως πολυωνυμική.
- Αν $0 < x \leq \frac{3\pi}{2}$, f συνεχής ως τριγωνομετρική.

Έχουμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{ax^3 - 3x^2 - x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(ax^2 - 3x - 1)}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} ax^2 - 3x - 1 = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 0$$

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$

Οπότε η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0.$

Γ2.

i.

1. Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{2}\right]$ από Γ1.

2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \frac{3\pi}{2})$.

3. $f(0) = 1$.

$f(\frac{3\pi}{2}) = \sin \frac{3\pi}{2} = 0 \neq f(0)$ άρα δεν ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle.

ii. Αν $x \in (0, \frac{3\pi}{2})$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\eta\mu x$.

Λύνω $f'(x) = 0 \Rightarrow -\eta\mu x = 0 \Leftrightarrow \eta\mu x = \eta\mu 0 \Leftrightarrow x = 2κ\pi$ ή $x = 2κ\pi + \pi$ με $κ \in \mathbb{Z}$.

• Αν $x = 2κ\pi$

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2κ\pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2κ < \frac{3}{2} \Leftrightarrow 0 < κ < \frac{3}{4}$, $κ \in \mathbb{Z}$ άρα δεν υπάρχει τέτοιο $κ$.

• Αν $x = 2κ\pi + \pi$

$0 < x < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2κ\pi + \pi < \frac{3\pi}{2} \Leftrightarrow 0 < 2κ + 1 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow -1 < 2κ < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$-\frac{1}{2} < κ < \frac{1}{4}$ επειδή $κ \in \mathbb{Z}$, $κ = 0$. Άρα $x = \pi$.

Άρα ισχύει $f'(\xi) = 0$ αν $\xi = \pi$.

Γ3.

Έστω ότι υπάρχει $M(x_0, f(x_0))$ με $x_0 < 0$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_f στο M να είναι παράλληλη στον $x'x$. Τότε $f'(x_0) = 0$.

Για $x < 0$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$

$$f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow 3ax_0^2 - 6x_0 - 1 = 0$$

$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 3a \cdot (-1) = 36 + 12a = 12(a + 3) < 0$ Αδύνατη γιατί $a < -3$

Άρα, δεν υπάρχει τέτοιο σημείο.

Γ4.

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} .

• Αν $x < 0$, $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1 < 0$ γιατί $3a < 0$.

• Αν $x > 0$, $f'(x) = -\eta\mu x$ με $f'(\pi) = 0$.

x	$-\infty$	0	π	$\frac{3\pi}{2}$	$+\infty$
$3ax^2 - 6x - 1$	-				
$-\eta\mu x$		-	0	+	
$f'(x)$	-	-	0	+	
$f(x)$		↘		↗	

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = \pi$, το $f(\pi) = \text{συν}\pi = -1$.

Άρα $f(x) \geq f(\pi)$, για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow f(x) \geq -1$ για $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$$

Έστω $k(x) = \ln x - \frac{1}{x}$, $x > 0$

1) k συνεχής στο $[1, e]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$$2) k(1) = \ln 1 - \frac{1}{1} = -1 < 0$$

$$k(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} = \frac{e-1}{e} > 0$$

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, e)$, ώστε $k(x_0) = 0$

$k(x)$ συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

$k(x)$ παραγωγίσιμη με $k'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ Άρα k "1-1" άρα x_0 μοναδικό.

Δ2.

$$f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = (\ln x_0)(x+1) - \ln x - 1$$

Η f συνεχής στο D_f ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Η f παραγωγίσιμη με $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x}$, όπου $\ln x_0 = \frac{1}{x_0}$ από Δ1.

Για $x > 0$,

- $x > x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} > 0$
- $x < x_0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{x_0} \Leftrightarrow \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} < 0$

x	$-\infty$	0	x_0	$+\infty$
$f'(x)$			\ominus	\oplus
$f(x)$			\nearrow	\searrow

O.E.

Άρα, η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = x_0$ το

$$f(x_0) = \ln x_0 (x_0 + 1) - \ln x_0 - 1 \stackrel{\Delta 1}{\Leftrightarrow}$$

$$f(x_0) = \frac{1}{x_0} (x_0 + 1) - \frac{1}{x_0} - 1 = \frac{x_0}{x_0} + \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0} - 1 = 0.$$

Δ3.

$$g(x) = xe^{-x}, x \in \mathbb{R}.$$

$$h(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}, x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Λύνω } g(x) = h(x) \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \frac{x}{e^x} = \frac{x_0^{x+1}}{e^{x+1}} \stackrel{e^x > 0}{\Leftrightarrow} x = \frac{x_0^{x+1}}{e} \Leftrightarrow ex = x_0^{x+1} \stackrel{x > 0}{\Leftrightarrow}$$

$$\ln(ex) = (\ln x_0)^{x+1} \Leftrightarrow \ln e + \ln x = (x+1) \ln(x_0)$$

$$\Leftrightarrow (x+1) \cdot \ln x_0 - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \stackrel{\Delta 2}{\Leftrightarrow} x = x_0.$$

Αν $x \leq 0$ η εξίσωση είναι αδύνατη.

Αρκεί να δείξω ότι $h'(x_0) = g'(x_0)$

- h παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $h'(x) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot \ln \frac{x_0}{e} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \cdot (\ln x_0 - 1)$.
- g παραγωγίσιμη στο \mathbb{R} με $g'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = e^{-x}(1 - x)$.
- $h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} (\ln x_0 - 1) \stackrel{\Delta 1}{\Leftrightarrow} h'(x_0) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \left(\frac{1}{x_0} - 1\right) = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1-x_0}{x_0}$.

- $g'(x_0) = e^{-x_0} \cdot (1 - x_0)$.

Θέλω να δείξω $h'(x_0) = g'(x_0)$

$$\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1} \cdot \frac{1-x_0}{x_0} = e^{-x_0} \cdot (1-x_0) \stackrel{x_0 \neq 1}{\iff} \frac{x_0^{x_0+1}}{e^{x_0+1}} \cdot \frac{1}{x_0} = \frac{1}{e^{x_0}} \iff \frac{x_0^{x_0+1}}{e} \cdot \frac{1}{x_0} = 1$$

$$\iff x_0^{x_0} = e \iff \ln x_0^{x_0} = \ln e \iff x_0 \cdot \ln x_0 = 1 \stackrel{x_0 \neq 0}{\iff} \ln x_0 = \frac{1}{x_0} \text{ ισχύει από } \Delta 1.$$

Δ4. $\varphi: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) > \varphi(x)$, $x > 0$

$$A(x, f(x)), \quad B(x, \varphi(x))$$

Θεωρώ τη συνάρτηση $d(x) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} = \sqrt{(x - x)^2 + (f(x) - \varphi(x))^2} =$
 $\sqrt{(f(x) - \varphi(x))^2} = |f(x) - \varphi(x)| \stackrel{f(x) > \varphi(x)}{\iff}$

$$d(x) = f(x) - \varphi(x), \quad x > 0.$$

- Αν φ παραγωγίσιμη στο x_0 :
 1. Η d παρουσιάζει ελάχιστο για $x = x_0$.
 2. $x = x_0$ εσωτερικό του $(0, +\infty)$.
 3. d παραγωγίσιμη στο $x = x_0$.

Από το θεώρημα Fermat : $d'(x_0) = 0 \iff f'(x_0) - \varphi'(x_0) = 0 \iff f'(x_0) = \varphi'(x_0)$
 $\stackrel{\Delta 2}{\iff} \varphi'(x_0) = 0 \iff x_0$ κρίσιμο σημείο της φ .

- Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 , το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

Σε κάθε περίπτωση, το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ .

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

Επιμέλεια : Αραμπατζής Φίλιππος, Γεωργιάδου Λεϊά, Ιατρίδης Κοσμάς, Καρρά Θεοδώρα, Λιπορδέζη Μάρθα, Σουλτανίδου Κική.