Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Ημερομηνία: Τετάρτη 17 Ιουνίου 2020
Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α:

Α1. Σελ.76 σχολικό βιβλίο

Α2. Σελ. 104 σχολικό βιβλίο

Α3. Α) Ο ισχυρισμός είναι ψευδής.

Β) Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}, όμως\ f'(0) = 0$.

Α4.

α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ

γ) ΣΩΣΤΟ

δ) ΣΩΣΤΟ

ε) ΣΩΣΤΟ

ΘΕΜΑ Β:

Β1.

Df=(1,+∞)

Dg=ℝ

$Dfog = \{x\epsilon\mathbb{R}/g(x) > 1\} = \{x\epsilon\mathbb{R} / e^x > 1\} = \{x\epsilon\mathbb{R} /e^x > e^0\} = \{x\epsilon\mathbb{R}/x > 0\}$

$Dfog = (0, +\infty)$.

$$fog(x) = f\big(g(x)\big) = f(e^x) = \frac{e^x + 2}{e^x - 1}$$

B2.

Έστω $x_1, x_2 \epsilon D_{fog}\ \mu\varepsilon$

$fog(x_1) = fog(x_2) \Leftrightarrow \frac{e^{x_1+2}}{e^{x_1-1}} = \frac{e^{x_2+2}}{e^{x_2-1}} \Leftrightarrow (e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1) = (e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1) \Leftrightarrow e^{x_1+x_2} - e^{x_1} + 2e^{x_2} - 2 = e^{x_1+x_2} + 2e^{x_1} - e^{x_2} - 2 \Leftrightarrow -3e^{x_1} = -3e^{x_2} \Leftrightarrow e^{x_1} = e^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$ άρα fog 1-1 συνεπώς fog αντιστρέφεται.

Β' τρόπος:

Η fog είναι συνεχής στο D_{fog} ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με :

$$(fog)'(x) = \frac{e^x(e^x-1) - e^x(e^x+2)}{(e^x-1)^2} = \frac{-e^x - 2e^x}{(e^x-1)^2} = \frac{-3e^x}{(e^x-1)^2} < 0$$

Άρα η fog(x) είναι γνησίως φθίνουσα στο D_{fog}.

Εφόσον η fog είναι συνεχής στο D_{fog} και γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$ για το σύνολο τιμών έχουμε :

$$(fog)\big((0,+\infty)\big) = \left(\lim_{x\to+\infty}(fog)(x), \lim_{x\to0^+}(fog)(x)\right)$$

- $\lim_{x\to+\infty}(fog)(x) \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+2}{e^x-1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$ (Dlh $\frac{\infty}{\infty}$)
- $\lim_{x\to0^+}(fog)(x) = \lim_{x\to0^+}\frac{e^x+2}{e^x-1} = l.$ $Έχουμε\ x > 0 \Leftrightarrow e^x > 0\ Άρα\ l = +\infty.$

Το σύνολο τιμών της fog είναι το $(1, +\infty)$.

Για την αντίστροφη:

Λύνω $y = (fog)(x) \Leftrightarrow y = \frac{e^x+2}{e^x-1} \Leftrightarrow y\cdot e^x - y = e^x + 2 \Leftrightarrow e^x(y-1) = y+2 \Leftrightarrow e^x = \frac{y+2}{y-1} \Leftrightarrow$ $(fog)^{-1}(x) = ln\frac{x+2}{x-1}, x\epsilon(1, +\infty).$

B3. φ(x) συνεχής στο $(1, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων και παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = \frac{1}{\frac{x+2}{x-1}}\cdot \left(\frac{x+2}{x-1}\right)' = \frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} = -\frac{3}{(x-1)(x+2)} < 0\ \gamma\iota\alpha\ x > 1.$

x	-oo	1	+oo
-3	///////////////////////////		-
x-1	//////////////////////////		+
x+2	/////////////////////////		+
φ'(x)	////////////////////////		-
φ(x)	////////////////////////		$\searrow$

Άρα φ(x) γνησίως φθίνουσα στο (1,+∞).

B4.

- $\lim\limits_{x\to 1^+} ln\frac{x+2}{x-1} = l_1$

Θέτω $u = \frac{x+2}{x-1}$.

$u_0 = \lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1} = +\infty$.

Άρα $l_1 = \lim\limits_{u\to +\infty} lnu = +\infty$.

- $\lim\limits_{x\to +\infty} ln\frac{x+2}{x-1} = l_2$
  Θέτω $u = \frac{x+2}{x-1}$, άρα $u_o = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+2}{x-1} = \lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x}{x} = 1$

Άρα $l_2 = \lim\limits_{u\to 1} lnu = 0$.

ΘΕΜΑ Γ.

Γ1. f συνεχής ⇒ f συνεχής στο x=0⇒ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0)$

$f(0) = \frac{1}{1-0} - ln\lambda = 1 - ln\lambda$.

Οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 1 - ln\lambda$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$. Άρα, $1 - ln\lambda = \lambda \Leftrightarrow ln\lambda + \lambda - 1 = 0$.

Έστω $\varphi(x) = lnx + x - 1, x > 0$

Η φ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων.

Επίσης φ παραγωγίσιμη με $\varphi'(x) = \frac{1}{\lambda} + 1 > 0 \Rightarrow \varphi \nearrow \sigma\tau o\ (0, +\infty) \Rightarrow \varphi: 1-1$

Η εξίσωση γίνεται $\varphi(\lambda) = \varphi(1) \Leftrightarrow \lambda = 1\ (\varphi: 1-1)$

Άρα $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1-x}, & x\le 0\\ \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x, & 0<x<\frac{3\pi}{2}\end{cases}$

Γ2. $f(0)=1$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\frac{1-1+x}{1-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)}=\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x}=1.$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x}+\frac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}\right)=1+0=1.$
  Άρα $f'(0)=1$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η C_f $\mu\varepsilon\ \tau o\ x'x.$ $f'(0)=1$ ή $f'(0)=\varepsilon\varphi 45^o.$ Ά$\rho\alpha\ \omega=\frac{\pi}{4}$.

Γ3. Η f είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\frac{3\pi}{2}\right)$

- Αν x<0 : f παραγωγίσιμη με $f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}>0$
- Αν $0<x<\frac{3\pi}{2}$: f παραγωγίσιμη με $f'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x.$

Λύνω $f'(x)=0\Leftrightarrow \eta\mu x=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sigma\upsilon\nu x\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi+x$ ή $\frac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi-x$ $\eta\ o\pi o\acute{\iota}\alpha\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau\eta.$

Άρα $\frac{\pi}{2}-x=2\kappa\pi+x\Leftrightarrow x=-\kappa\pi+\frac{\pi}{4},\kappa\epsilon\mathbb{Z}.$

Επίσης

$$0<x<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<-\kappa\pi+\frac{\pi}{4}<\frac{3\pi}{2}\Leftrightarrow 0<-\kappa+\frac{1}{4}<\frac{3}{2}\Leftrightarrow -\frac{1}{4}<-\kappa<\frac{5}{4}\Leftrightarrow -\frac{5}{4}<\kappa<\frac{1}{4}\Leftrightarrow \kappa=-1 \text{ ή } \kappa=0,\kappa\epsilon\mathbb{Z}.$$

Οπότε

$x=\frac{5\pi}{4}$ $\kappa\alpha\iota$ $x=\frac{\pi}{4}$

Τα κρίσιμα σημεία είναι $A\left(\frac{5\pi}{4},f\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)$ και $B=\left(\frac{\pi}{4},f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

Γ4. Έστω ε: $y-f(a)=f'(a)(x-a)\Leftrightarrow y-\frac{1}{1-a}=\frac{1}{(1-a)^2}\cdot(x-a)$

Για $y=0$: $-\frac{1}{1-\alpha}=\frac{1}{(1-\alpha)^2}(x-a)\Leftrightarrow -(1-a)=x-a\Leftrightarrow x=a-1+a\Leftrightarrow x=2a+1$

$B(2a-1{,}0)$ ή $B=(2\alpha(t)-1{,}0)$

$\alpha(t_0)=-1$

$x_B'(t)=2a'(t)=2\left(-\dfrac{a(t)}{3}\right)=-\dfrac{2a(t)}{3}$

$x_B'(t_0)=-\dfrac{2a(t_0)}{3}=\dfrac{2}{3}\mu o\nu/sec.$

ΘΕΜΑ Δ:

Δ1.

f συνεχής στο $\mathbb{R}$ ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με

$f'(x)=(e^x+x^2-ex-1)'=e^x+2x-e$

$f'(0)=1-e<0$

$f'(1)=e+2-e=2>0$

Άρα $f'(0)\cdot f'(1)<0$ *και* f' *συνεχής στο* $[0{,}1]$

Οπότε με Θεώρημα Bolzano η εξίσωση $f'(x)=0$ *έχει 1 τουλάχιστον ρίζα* $x_0\in(0{,}1)$

και $f''(x)=e^x+2>0$ *για κάθε* $\mathrm{x}\in\mathbb{R}$ *δηλαδή* f' *γνησίως αύξουσα στο* $\mathbb{R}$

οπότε η ρίζα x_0 *της* f' *είναι μοναδική δηλαδή* $f'(x_0)=0,\ x_0\in(0{,}1)$

Για $x<x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)<f'(x_0)=0$

x	-∞	x_0 $+\infty$
f''	+	+
f'	-	○ +
f	↘	↗

$f'(x)<0$

Για $x>x_0\overset{f'\nearrow}{\Rightarrow}f'(x)>f'(x_0)=0$

$f'(x)>0$

Άρα f' ↘ *στο* $(-\infty,x_0]$ *και* f' ↗ *στο* $[x_0,+\infty)$ *οπότε παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο* x_0

με $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$

ΑΠΟ ΤΟ 1980
2001-ΟΡΟΣΗΜΟ
οραματίζουμε την επιτυχία

και ισχύει $f'(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0} + 2x_0 \ - e = 0 \Rightarrow e^{x_0} = e - 2x_0$

$\Rightarrow f(x_0) = e - 2x_0 + x_0^2 - ex_0 - 1 = x_0^2 - (e+2)x_0 + e - 1$

$\Rightarrow f(x_0) = x_0^2 - (e{+}2)x_0 + e - 1$

Δ2.

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right]$$

Είναι $-1 \leq ημ\frac{1}{x-x_0} \leq 1 \Rightarrow -1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)} \leq \frac{1}{f(x)-f(x_0)} + ημ\frac{1}{x-x_0} \leq 1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}$

$\lim_{x \to x_0}(f(x) - f(x_0)) = f(x_0) - f(x_0) = 0$ *(f συνεχής)*

και $f(x) \geq f(x_0$ *για κάθε* $x \in \mathbb{R}$ *γιατί η* f *παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο* x_0

$\Rightarrow f(x) - f(x_0) \geq 0$

Άρα

Άρα $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)-f(x_0)} = +\infty$ *οπότε* $\lim_{x \to x_0}\left(-1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right) = +\infty$

Και $\lim_{x \to x_0}\left(1 + \frac{1}{f(x)-f(x_0)}\right) = +\infty$

Οπότε με κριτήριο παρεμβολής θα είναι

$$\lim_{x \to x_0} \left[\frac{1}{f(x) - f(x_0)} + ημ\left(\frac{1}{x - x_0}\right)\right] = +\infty$$

Δ3.

Θεωρώ τη συνάρτηση $g(x) = f(x) + x, x\epsilon[x_0, 1]$

- Η g είναι συνεχής στο $[x_0, 1]$ και παραγωγίσιμη με $g'(x) = f'(x) + 1 > 0$ για κάθε $x \in (x_0, 1)$ αφού $f'(x) > 0$ για κάθε $x > x_0$ (*από Δ1*).

Άρα g γνησίως αύξουσα στο $Δ[x_0, 1]$

οπότε το σύνολο τιμών της g είναι

$g(Δ) = [g(x_0), g(1)]$ *με* $g(1) = f(1) + 1 = 1, (f(1) = 0)$ *και* $g(x_0) = f(x_0) + x_0$

Είναι f(1)=0 και $f \nearrow$ *στο* $[x_0, 1]$

οπότε για $x_0 < x < 1 \Rightarrow f(x_0) < f(1) = 0 \Rightarrow f(x) < 0 \Rightarrow f(x_0) + x_0 < x_0$ *και* $x_0 < 1$ *άρα* $f(x_0) + x_0 < x_0 < 1$

δηλαδή $g(\Delta) = [f(x_0) + x_0, 1]$ στο οποίο ανήκει η τιμή x_0 οπότε η εξίσωση $g(x) = x_0$ έχει μοναδική ρίζα $\rho \epsilon (x_0, 1)$, αφού $g \nearrow$ στο $[x_0, 1], \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}\ g(\rho) = x_0 \Leftrightarrow f(\rho) + \rho = x_0$.

Δ4.

Από Δ3 έχουμε $f'(\rho) = x_0 - \rho$ (1).

$f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \Leftrightarrow f(x_0) > (x_0 - \rho)(f'(\kappa) + 1), \quad \rho \epsilon (x_0, 1)$

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_0)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) + 1$ (3)

Από το Δ3 ερώτημα έχουμε ότι $g(x) = f(x) + x \quad \kappa\alpha\iota\ g'(x) = f'(x) + 1$

Και g συνεχής στο $[x_0, \rho]$ και παραγωγίσιμη στο (x_0, ρ) άρα μέσω του ΘΜΤ υπάρχει $\xi \epsilon (x_0, \rho)$ώστε $g'(\xi) = \frac{g(x_0) - g(\rho)}{x_0 - \rho} = \frac{f(x_0) + x_0 - (f(\rho) + \rho)}{x_0 - \rho} = \frac{f(x_0) + x_0 - f(\rho) - \rho}{x_0 - \rho} = \frac{f(x_0) + x_0 - (x_0 - \rho) - \rho}{x_0 - \rho} = \frac{f(x_0)}{x_0 - \rho}$ (2)

Είναι $g''(x) = f''(x) > 0$ για κάθε $x \in (x_0, +\infty)$ (Από Δ1), άρα g' γνησίως αύξουσα στο $(x_0, +\infty)$ οπότε για

$x_0 < \xi < \rho < \kappa < 1$ (g)

$\Rightarrow g'(\xi) < g'(\kappa)$ από (2)

$\Rightarrow \dfrac{f(x_0)}{x_0 - \rho} < f'(\kappa) + 1\ \alpha\pi\acute{o}$ (3)

$\Leftrightarrow f(x_0) > f(\rho)(f'(\kappa) + 1) \gamma\iota\alpha\ \kappa \epsilon (\rho, 1)$.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !