Πανελλήνιες Εξετάσεις Ημερήσιων Γενικών Λυκείων
Εξεταζόμενο Μάθημα:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ
Ημερομηνία: Τρίτη 6 Ιουνίου 2023

Ενδεικτικές Απαντήσεις Θεμάτων

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 111
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα104
Α3. Σχολικό βιβλίοσελίδα 128
Α4. α) Λάθος β) Λάθος γ) Λάθος δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$g(x) = \dfrac{4 - e^{2x}}{e^x}, x \in \mathbb{R} \quad h(x) = lnx, x > 0$

Β1.$D_f = D_{g\circ f} = \{x \in D_h \, και \, h(x) \in D_g\}$.

- $x \in D_h \Leftrightarrow x > 0$
- $x \in D_g \Leftrightarrow lnx \in \mathbb{R}$ισχύει.

Άρα, $D_f = (0, +\infty)$

Οπότε, $f(x) = (g \circ h)(x) = g(h(x)) = \frac{4 - e^{2g(x)}}{e^{g(x)}} = \frac{4-(e^{g(x)})^2}{e^{\ln x}} = \frac{4 - x^2}{x}$

Β2.

i. Η f συνεχής στο $(0, +\infty)$ ως πράξεις συνεχών.
Η fπαραγωγίσιμη με $f'(x) = \frac{-2x\cdot x-(4-x)}{x^2} = \frac{-2x^2-4+x^2}{x^2} = \frac{-x^2-4}{x^2} < 0$.
Άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

ii. $\frac{4-\pi^2}{4-e^2} > \frac{\pi}{e} \underset{4-e^2<0}{\overset{\pi>0}{\Leftrightarrow}} \frac{4-\pi^2}{\pi} < \frac{4-e^2}{e} \Leftrightarrow f(\pi) < f(e) \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} \pi > e$ισχύει.
$* \, e > 2 \Rightarrow e^2 > 4 \Rightarrow 4 - e^2 < 0$

Β3.

- $\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} \left(\frac{4-x^2}{x}\right) = l$
- $\lim\limits_{x\to 0+} (4 - x^2) = 4$
- $\lim\limits_{x\to 0+} x = 0$
- $x > 0$

Άρα από τα παραπάνω $l = +\infty \Rightarrow x = 0$ κατακόρυφη.

Οριζόντιες – Πλάγιες

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{4-x^2}{x}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4 - x^2}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \Rightarrow \lambda = -1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)+x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2+x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0$$
$$\Longrightarrow \beta=0$$

Άρα $y=-x$ πλάγια στο $+\infty$.

B4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}=l$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x}=-\infty$$

$$l=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right)$$

$$\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\le 1\overset{\left|\frac{1}{f(x)}\right|>0}{\Leftrightarrow}\left|\frac{1}{f(x)}\right|\left|\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow\left|\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\right|\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|\Leftrightarrow$$
$$-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\le\frac{\sigma\upsilon\nu(1+x^2)}{f(x)}\le\left|\frac{1}{f(x)}\right|$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|\right)\overset{\frac{1}{-\infty}}{=}0\\[2ex] \lim\limits_{x\to+\infty}\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|=0\end{array}\right\}\underset{\pi\alpha\rho\varepsilon\mu\beta o\lambda\acute{\eta}\varsigma}{\overset{\kappa\rho\iota\tau\acute{\eta}\rho\iota o}{\Rightarrow}} l=0$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως πράξεις συνεχών

$$\int_2^3 xf(x)dx=1$$
$$\Leftrightarrow\int_2^3 x\left(\frac{1}{x}+a\right)dx=1$$
$$\Leftrightarrow\int_2^3(1+ax)dx=1\Leftrightarrow\left[x+\frac{ax^2}{2}\right]_2^3=1\Leftrightarrow 3+\frac{9a}{2}-2-2a=1$$
$$\Leftrightarrow 1+\frac{5a}{2}=1\Leftrightarrow\frac{5a}{2}=0\Leftrightarrow a=0$$

Άρα $f(x)=\begin{cases}x^2-3x+3, x<1\\ \frac{1}{x}, x\ge 1\end{cases}$

Γ2.

i. Αρκεί να δείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$f(1) = \frac{1}{1} = 1$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\frac{1-x}{x}}{(x-1)} = \lim_{x \to 1^+} \frac{-(x-1)}{x(x-1)} = -1$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 3x + 3 - 1}{x - 1} \underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x \to 1^-} \frac{2x - 3}{1} = -1$$

Άρα $f'(1) = 1$.

ii. $\varepsilon: y - f(1) = f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -1(x-1) \Leftrightarrow y - 1 = -x + 1 \Leftrightarrow y = -x + 2$

Έστω ω η γωνία που σχηματίζει η (ε) με τον x'x.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Τότε } 0° \leq \omega \leq 180° \\ \varepsilon\varphi\omega = -1 \Rightarrow \varepsilon\varphi\omega = \varepsilon\varphi 135° \end{array}\right\} \Rightarrow \omega = 135°$$

Γ3. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $x = 1$ άρα η f είναι συνεχής στο $x = 1$.
Αν $x < 1$, f συνεχής ως πράξεις συνεχών.
Αν $x > 1$, f συνεχής ως πράξεις συνεχών.
Άρα f συνεχής στο $\mathbb{R}$.

Αν $x < 1$, f παραγωγίσιμη με $f'(x) = 2x - 3$

Λύνω $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$ απορρίπτεται.

Αν $x > 1$, η f είναι παραγωγίσιμη με $f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$

x	$-\infty$ 1	$+\infty$
$2x-3$	$-$	
$-\frac{1}{x^2}$		$-$
$f'(x)$	$-$	$-$
$f(x)$		

f συνεχής

Άρα, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R} \Rightarrow f: 1-1$

f συνεχής και γνησίως φθίνουσα, άρα $f(A) = \left(\lim_{x \to +\infty} f(x), \lim_{x \to -\infty} f(x)\right)$

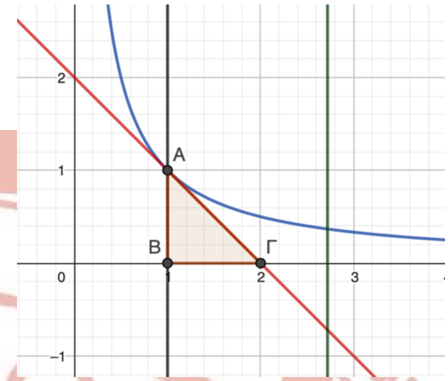
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} \left(x^2 - 3x + 3\right) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$

$f(A) = (0, +\infty)$

Γ4. Λύνω $-x + z = 0 \Rightarrow x = z$

Η f είναι συνεχής στο $[1,e]$, $f(x)>0$ άρα



$$E=\int_1^e f(x)dx-(AB\Gamma)$$
$$=\int_1^e f(x)dx-\frac{1}{2}(\Gamma B)(\Gamma A)$$
$$=\int_1^e \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=[lnx]_1^e-\frac{1}{2}$$
$$=lne-ln1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\ \tau.\mu.$$

<u>ΘΕΜΑ Δ</u>

Δ1. Έστω $g(x)=\frac{f(x)-2x}{x-1}$.

Τότε $\lim_{x\to 1} g(x)=l\in\mathbb{R}$.

Είναι $g(x)\cdot(x-1)=f(x)-2x \Leftrightarrow f(x)=g(x)\cdot(x-1)+2x$.

Άρα $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(g(x)\cdot(x-1)+2x)=l\cdot 0+2=2$

Όμως $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa\right)=ln1-1+\kappa=\kappa-1$.

Άρα $\kappa-1=2 \implies \kappa=3$

Άρα $f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3, x\in(0,2)$.

Δ2. Η f συνεχής στο (0,2) ως πράξεις συνεχών, η f παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=\frac{1}{2-x}\cdot(-1)+\frac{1}{x^2}=\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2}{x^2(x-2)}+\frac{x-2}{x^2(x-2)}=\frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}$$

Λύνω $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2+x-2}{x^2(x-2)}=0 \Leftrightarrow x^2+x-2=0 \Leftrightarrow \underset{\Delta\varepsilon\kappa\tau\eta}{x=1}$ ή $\underset{\text{Απορρίπτεται}}{x=-2}$

x	$-\infty$ 0		1		2 $+\infty$
x^2+x-2		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$					
			Τ.Μ		

Στο $A_1=(0,1]$ η f συνεχής και γνησίως αύξουσα άρα

$f(A_1)=(\lim_{x\to 0^+} f(x), f(1)]$

$f(1)=ln1-1+3=2$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=-\infty$

γιατί $\lim_{x\to 0^+}(-\frac{1}{x})\overset{\frac{a}{0}}{=}-\infty$

Άρα $f(A_1)=(-\infty,2]$.

$0\epsilon f(\Delta_1)$. Συνεπώς υπάρχει $x_1\epsilon(0,1)$ ώστε $f(x_1)=0$.

Επειδή f γνησίως αύξουσα στο A_1.
Άρα x_1 είναι μοναδικό στο A_1.

Στο $A_2 = (1,2)$: f συνεχής και φθίνουσα, άρα
$f(A_2) = (\lim_{x\to 2^-} f(x), \lim_{x\to 1^+} f(x))$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) \overset{f\text{συν.}}{=} f(1) = 2$

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \left(\ln(2-x) - \frac{1}{2} + 3\right) = -\infty$

γιατί $\lim_{x\to 2^-} \ln(2-x) = l$

θέτω $u = 2 - x$ με $u_0 = \lim_{x\to 2^-}(2-x) = 0^+$

Άρα, $l = \lim_{u\to 0^+} \ln u = -\infty$

Οπότε, $f(A_2) = (-\infty, 2)$

$0 \in f(A_2) \Longrightarrow Υπάρχει\ \ x_2 \in (1,2)\ \ ώστε\ f(x_2) = 0.$

x_2 μοναδικό γιατί f φθίνουσα στο A_2

$f\left(\frac{1}{3}\right) = \ln\left(2 - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{\frac{1}{3}} + 3 = \ln\frac{5}{3}$

Έστω $x_1 \geq \frac{1}{3} \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x_1) \geq f\left(\frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow 0 \geq \ln\frac{5}{3}$ Άτοπο

Άρα $x_1 < \frac{1}{3}$.

Δ3.

1)Η f συνεχής στο $\left[x_1, \frac{1}{3}\right]$

2) Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_1, \frac{1}{3}\right)$

Από ΘΜΤ υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right)$ ώστε

$$f'(\xi) = \frac{f(x_1) - f(\frac{1}{3})}{x_1 - \frac{1}{3}} = \frac{-f(\frac{1}{3})}{x_1 - \frac{1}{3}} = \frac{3f(\frac{1}{3})}{1-3x_1}$$

f' συνεχής στο (0,2) ως πράξεις συνεχών

f' παραγωγίσιμη με $f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$ άρα f'' γνησίως φθίνουσα. Άρα,

f' γνησίως φθίνουσα στο (0,2) $\Rightarrow f'\text{:}1-1 \Rightarrow \xi$ μοναδικό.

Δ4.

i. $$\left.\begin{aligned} F'(x) &= f(x) \\ G'(x) &= f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow F'(x) = G'(x) \Rightarrow \left(F(x)\right)' = \left(G(x)\right)'$$

Οι συναρτήσεις $F(x)$ και $G(x)$ είναι συνεχείς στο (0,2) άρα υπάρχει σταθερά $c \in \mathbb{R}$ ώστε $F(x) = G(x) + c$

Για $x = x_1$: $F(x_1) = G(x_1) + c \Rightarrow -G(x_1) = c$

Άρα, $F(x) = G(x) - G(x_1)$

Για $x = x_2$: $F(x_2) = G(x_2) - G(x_1) \Rightarrow G(x_1) + F(x_2) = 0$

ii. $$x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x \Leftrightarrow x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x=0$$

Έστω $K(x)=x_1F(x)+x_2G(x)-x_1-x_2+2x$, $x\in(0,2)$.

$K(x_1)=x_1F(x_1)+x_2G(x_1)-x_1-x_2+2x_1=x_2G(x_1)+x_1-x_2$

$x_1-x_2<0$ γιατί $x_1 < 1 < x_2$.

Η G είναι συνεχής στο (0,2)

Η G είναι παραγωγίσιμη με $G'(x) = f(x)$.

Για την f:

Αν $0 < x \leq 1$: $x > x_1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0 \Leftrightarrow x<x_1 \overset{f\nearrow}{\Leftrightarrow} f(x)<0$

Αν $1\leq x<2$: $x<x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)>0 \Leftrightarrow x>x_2 \overset{f\searrow}{\Leftrightarrow} f(x)<0$

x	$-\infty$ $\quad$ 0	x_1	1		x_2 $\quad$ 2	$+\infty$
$f(x)$		$-$	$+$	$+$	$-$	
$F(x), G(x)$		$\searrow$			$\searrow$	

Άρα, F, G γνησίως φθίνουσες στο $(0,x_1]$

F, G γνησίως αύξουσες στο $[x_1,x_2]$

F, G γνησίως φθίνουσες στο $[x_2,2)$

$$x_1<x_2 \overset{G\nearrow}{\Leftrightarrow} G(x_1)<G(x_2) \Leftrightarrow \left.\begin{array}{r} G(x_1)<0 \\ x_2>0 \end{array}\right\} \Rightarrow x_2G(x_1)<0$$ άρα, $K(x_1)<0$

$K(x_2) = x_1F(x_2) + x_2G(x_2) - x_1 - x_2 + 2x_2 + x_1F(x_2) = x_2 - x_1 + x_1F(x_2)$

$$x_1 < x_2 \overset{F\nearrow}{\Leftrightarrow} \left.\begin{array}{r} F(x_1) < F(x_2) \\ x_1 > 0 \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{r} F(x_2) > 0 \quad x_1F \\ x_2 - x_1 > 0 \end{array}\right\} \Rightarrow K(x_2) > 0$$

Άρα $K(x_1)K(x_2) < 0$.

Επίσης, η K είναι συνεχής στο $[x_1, x_2]$ ως πράξεις συνεχών.

Από Θεώρημα Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον $x_0\epsilon(x_1, x_2)$ ώστε $K(x_0) = 0$

Η K είναι συνεχής στο (0,2) ως πράξεις συνεχών και παραγωγίσιμη με

$K'(x) = x_1f(x) + x_2f(x) + 2 > 0$ για $x \;\epsilon(x_1, x_2)$, γιατί $f(x) > 0$ και $x_1, x_2 > 0$

Άρα K $\nearrow$ στο (x_1, x_2).

Άρα x_0 μοναδικό.

Επιμέλεια: Αραμπατζής Φίλιππος, Γεωργιάδου Λεία, Δαμκαλή Μαριλένα, Καρρά Θεοδώρα, Λιπορδέζη Μάρθα, Μπαξεβανίδης Δοξάκης, Σουλτανίδου Κική, Στούρου Μαρία

Ευχόμαστε καλά αποτελέσματα!